Выписка из протокола заседания кафедры теории функций и функционального анализа от 22 февраля 2013 года

Присутствовали: профессора Б.С.Кашин, М.К.Потапов, А.Г.Сергеев, Е.П.Долженко, В.А.Скворцов, О.Г.Смолянов, А.М.Степин, А.Я.Хелемский, В.К.Белошапка, М.И.Дьяченко, В.В.Рыжиков, П.В.Парамонов, В.И.Богачев, доценты: В.М.Федоров, Н.С.Вячеславов, Ю.Е.Куприков, В.С.Буяров, А.В.Домрин, П.А.Бородин.

Слушали: О выдвижении на премию им.М.В.Ломоносова цикла работ по CR-геометрии доктора физико-математических наук, профессора Валерия Константиновича Белошапки (см.список работ). По этому вопросу выступили А.Г.Сергеев, А.М.Степин, О.Г.Смолянов, А.В.Домрин.

Выступающие отметили следующее. В 1907-м году А.Пуанкаре выявил ключевую роль 3-мерной гиперсферы в голоморфной геометрии вещественных гиперповерхностей двумерного комплексного пространства. Эта работа Пуанкаре поставила две важных проблемы: проблему поиска модельных поверхностей (аналогов гиперсферы) и проблему классификации голоморфно однородных многообразий. В 1932-м году Э.Картан, используя результат Пуанкаре, решил задачу классификации всех однородных 3-мерных CR-многообразий (см.список A). В 1974 г. Ю.Мозер показал, что гиперквадрики являются модельными поверхностями для класса гиперповерхностей (поверхностей коразмерности 1) пространства произвольного числа комплексных переменных. В 2004-м году В.К.Белошапка построил модельные поверхности для класса поверхностей произвольной размерности и коразмерности, что явилось решением в полной общности, первой из указанных проблем. Разработанный им подход (метод модельной поверхности) уже продемонстрировал высокую эффективность, позволил обнаружить много новых интересных явлений и постановок. В частности, в 2011-м году В.К.Белошапке и И.Г.Коссовскому (аспирантура ТФФА) с помощью метода модельной поверхности удалось построить полную голоморфную классификацию всех однородных 4-мерных CR-многообразий (J.Math. Anal. Appl.374 (2011), 655–672), что явилось решением второй, из указанных проблем (см.список B). Построенная классификация представляет собой математически законченный и эстетически совершенный результат, а разработанный метод является перспективным и многообещающим направлением.

Постановили: Принять следующее заключение.

Разработанный В.К.Белошапкой метод модельной поверхности и его приложение к 4-мерным однородным многообразиям представляют собой решение двух крупных проблем, стоявших около 80-ти лет и серьёзным достижением в области многомерного комплексного анализа и дифференциальной геометрии. Кафедра выдвигает этот цикл работ В.К. Белошапки на соискание премии им.М.В.Ломоносова.

Заведующий кафедрой,
академик РАН

Б.С.Кашин

Ученый секретарь,
кафедры, доцент

Ю.Е.Куприков

Список A. Голоморфная классификация 3-мерных однородных вещественных многообразий (Э.Картан, 1932):

M_ξ - росток вещественно аналитического подмногообразия комплексного пространства, $\mathrm{aut}\, M_\xi$ - алгебра Ли его инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов. Координаты $\mathbf{C}^2$ - это $(z = x + iy,\ w = u + iv)$, а (r, φ) - полярные координаты на плоскости (y, v).

Случай 1. $\dim \mathrm{aut}\, M_\xi = \infty$

(1.1) $\mathbf{R}^3 \subset \mathbf{C}^3$ (вполне вещественная трехмерная плоскость)

(1.2) $\mathrm{Im}\, w = 0$ (гиперплоскость, имеет структуру $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$)

Случай 2. $\dim \mathrm{aut}\, M_\xi = 8$

(2) $\mathrm{Im}\, w = |z|^2 \quad \sim \quad |z|^2 + |w|^2 = 1$ (сфера)

Случай 3. $\dim \mathrm{aut}\, M_\xi = 3$

(3.1) $v = y^s,\ s \in [-1, 1), s \neq \frac{1}{2}$

(3.2) $v = y \ln y$

(3.3) $r = e^{a\varphi}$

(3.4) $1 + |z|^2 + |w|^2 = a|1 + z^2 + w^2|,\ a > 1$

(3.5) $1 + |z|^2 - |w|^2 = a|1 + z^2 - w^2|,\ a > 1$

(3.6) $-1 + |z|^2 + |w|^2 = a| - 1 + z^2 + w^2|,\ 0 < |a| < 1$

Список B. Голоморфная классификация 4-мерных однородных вещественных многообразий (В.Белошапка, И.Коссовский, 2011):

Координаты $\mathbf{C}^3$ - это $(z = x + iy, w_2 = u_2 + iv_2, w_3 = u_3 + iv_3)$, (r, φ) - полярные координаты на плоскости (y, v_2), а (R, θ) - полярные координаты на плоскости (y, v_3). Различным значениям параметров соответствуют голоморфно не эквивалентные поверхности.

Случай 1. - $\dim\ \mathrm{aut}\, M_\xi = \infty$:

(1.1) $\mathbf{R}^4 \subset \mathbf{C}^4$ (вполне вещественная 4-мерная плоскость)
(1.2) $\mathbf{C}^2$ (2-мерная комплексная плоскость)
(1.3) $v_2 = 0,\ v_3 = 0$ (4-мерная плоскость, имеющая структуру $\mathbf{C} \times \mathbf{R}^2$)
(1.4) $|z|^2 + |w_2|^2 = 1,\ v_3 = 0$ (это цилиндр над сферой в $\mathbf{C}^2$)
(1.5) $v_2 = y^s,\ s \in [-1, 1), s \neq \frac{1}{2},\ v_3 = 0$
(1.6) $v_2 = y \ln y,\ v_3 = 0$
(1.7) $r = e^{a\varphi},\ v_3 = 0$
(1.8) $1 + |z|^2 + |w_2|^2 = a|1 + z^2 + w_2^2|,\ v_3 = 0,\ a > 1$
(1.9) $1 + |z|^2 - |w_2|^2 = a|1 + z^2 - w_2^2|,\ v_3 = 0,\ a > 1$
(1.10) $-1 + |z|^2 + |w_2|^2 = a| - 1 + z^2 + w_2^2|,\ v_3 = 0,\ 0 < |a| < 1$

(1.5)-(1.10) - цилиндры над поверхностями Картана.

Случай 2. - $\dim \operatorname{aut} M_\xi = 5$:

(2.1) $\{v_2 = |z|^2,\ v_3 = 2|z|^2 \operatorname{Re} z\} \sim \{v_2 = y^2,\ v_3 = y^3\}$

(модельная кубика - полный аналог сферы у Пуанкаре).

Случай 3. - $\dim \operatorname{aut} M_\xi = 4$

(3.1) $v_2 = xe^y + \gamma ye^y,\ v_3 = e^y,\ \gamma \in \mathbf{R}$

(3.2) $v_2 = \frac{x}{y} + \gamma \ln y,\ v_3 = \frac{1}{y},\ \gamma \in \mathbf{R}$

(3.3) $v_2 = xy^\alpha + \gamma y^{\alpha+1},\ v_3 = y^\alpha,\ |\alpha| > 1,\ \alpha \neq 2, \gamma \in \mathbf{R}$

(3.4) $v_2 = xy\ln y + \gamma y^2,\ v_3 = y\ln y,\ \gamma \in \mathbf{R}$

(3.5) $v_2 = x\sqrt{1-y^2} + \gamma \arcsin y,\ v_3 = \sqrt{1-y^2},\ \gamma \in \mathbf{R}$

(3.6) $v_2 = \exp(q\theta)(x\sin(\theta) + \gamma), R = \exp(q\theta),\ q > 0, \gamma \in \mathbf{R}$

(3.7) $v_2 = e^y,\ v_3 = e^{x+\delta y},\ \delta \in \mathbf{R}$

(3.8) $v_2 = e^{x+\alpha y}\cos\beta y,\ v_3 = e^{x+\alpha y}\sin\beta y,\ \beta > 0, (\alpha,\beta) \neq (0,1)$

(3.9) $v_2 = e^x y\cos y,\ v_3 = e^x y\sin y$

(3.10) $v_2 = y^\alpha,\ v_3 = y^\beta,\ 1 < \alpha < \beta,\ (\alpha,\beta) \neq (2,3)$

(3.11) $v_2 = e^{ay},\ v_3 = e^y,\ 0 < |a| < 1$

(3.12) $v_2 = \operatorname{ch} y,\ v_3 = \operatorname{sh} y$

(3.13) $v_2 = y^\alpha \ln y,\ v_3 = y^\alpha,\ \alpha \neq \{0;1\}$

(3.14) $v_2 = ye^y,\ v_3 = e^y$

(3.15) $v_2 = y^2,\ v_3 = e^y$

(3.16) $v_2 = y\ln^2 y,\ v_3 = y\ln y$

(3.17) $v_2 = e^y\cos\beta y,\ v_3 = e^y\sin\beta y,\ \beta > 0$

(3.18) $v_2 = y^\alpha\cos(\beta\ln y),\ v_3 = y^\alpha\sin(\beta\ln y),\ \beta > 0$

(3.19) $v_2 = \cos y,\ v_3 = \sin y$

Избранные работы по данной теме:

1. Белошапка В.К. Вещественные подмногообразия комплексного пространства: их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации, УМН, 2002, Т. 57, №1. С. 3–44.
2. Белошапка В.К. Универсальная модель вещественного подмногообразия, Мат. заметки. 2004. Т. 75, №4.
3. V. K. Beloshapka, Moduli Space of Model Real Submanifolds, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 13, No. 3, 2006, pp. 245–252.
4. Белошапка В.К., Программа А. Пуанкаре как альтернатива программе Ф. Клейна (к 100-летию публикации программы), Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 2008, том 1, выпуск 1,страницы 63-67.
5. В. К. Белошапка, В. В. Ежов, Г. Шмальц, Голоморфная классификация 4-мерных поверхностей в $\mathbf{C}^3$, Известия РАН, серия матем., том 72,№ 3, 2008.
6. V.K. Beloshapka, I.G. Kossovskiy, Classification of homogeneous CR-manifolds in dimension 4, J. Math. Anal. Appl. 374 (2011) 655–672.
7. В. К. Белошапка, Метод модельной поверхности: бесконечномерная версия, Труды МИАН, 2012, т. 279, с. 20–30.